Varianta 4

Subiectul I

a) $\sqrt{53}$. b) $\dfrac{19}{5}$. c) $5\sqrt{2}$. d) A($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B(-$\sqrt{2}$, -$\sqrt{2}$). e) a = -8, b = 0. f) -1.

Subiectul II

1) a) 1717. b) x = 1. c) [-3, 2]. d) $T_5 = 2^6 \cdot C_{10}^4 \cdot \sqrt[3]{x}^{\,22}$. e) 3.

2) a) Calcul direct. b) x = 0, x= -1. c) 0. d) $\dfrac{1}{3}$. e) $\dfrac{2007 \cdot 2009}{2008^2}$.

Subiectul III

a) Calcul direct.

b) det $(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc = f(x)$.

c) Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = tr(A)$, $x_1x_2 = \det A$.

d) $trI_2 = 2$, $\det I_2 = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$.

e) Prima relație se obține prin calcul direct, iar a doua prin înmulțirea sa cu A^n.

f) Dacă $x_1(n)$ şi $x_2(n)$ sunt rădăcinile ataşate polinomului asociat matricei A^n, arătăm că au loc relațiile $\begin{cases} x_1(n) + x_2(n) = x_1^n + x_2^n \\ x_1(n) \cdot x_2(n) = x_1^n \cdot x_2^n \end{cases}$.

Cum $x_1(n) \cdot x_2(n) = \det(A^n) = [\det(A^n)]^n$ şi

$x_1^n \cdot x_2^n = (x_1x_2)^n = [\det(A^n)]^n \Rightarrow x_1(n)x_2(n) = x_1^n x_2^n$. Demonstrăm prin inducție că $tr(A^n) = x_1^n + x_2^n$, oricare ar fi $n \in N$ şi deci x_1^n şi x_2^n sunt rădăcinile cerute.

g) Presupunem $A^n = I_2$ şi fie x_1, x_2 rădăcinile polinomului *f* ataşat lui A. Atunci, conform punctului f), x_1^n, x_2^n sunt rădăcinile lui $A^n = I_2$. Polinomul *f* ataşat lui I_2 are rădăcina dublă 1, deci $x_1^n = x_2^n = 1$. Rezultă $|x_1| = |x_2| = 1$. Atunci $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2| = 2 \Rightarrow$ $|trA| \le 2$, contradicție.

Subiectul IV:

a) Calcul direct.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_1(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \frac{1}{4}x^4}{x^4} = -\dfrac{1}{4}$.

c) $f_n'(x) = 1 - x^3 + x^6 - \ldots + (-1)^n \cdot x^{3n}$.

d) Din c) $\Rightarrow f_n'(x) = 1 \cdot \dfrac{1-(-x^3)^{n+1}}{1-(-x^3)} = \dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{1+x^3}$, $\forall$ x$\in$ **R** \{-1}.

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

f) Integrând egalitatea de la d) pe [0,1] şi ținând seama de rezultatul de la e) obținem

$f_n(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3}dx$. Dar $f_n(x)\Big|_0^1 = f_n(1) - f_n(0) = a_n$.

g) $\forall\ x \in [0,1]$ avem $0 \le \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} \le x^{3n+3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3}dx \le \int_0^1 x^{3n+3}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3}dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{x^{3n+3}}{1+x^3}\right|dx = \frac{1}{3n+4}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3}dx = 0$. Ținând cont de egalitatea de la f), obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.